

4

FUNCIONES ELEMENTALES

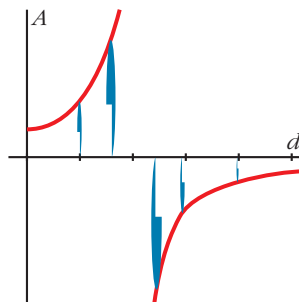
Página 105

REFLEXIONA Y RESUELVE

A través de una lupa

Mirando un objeto pequeño (un capuchón de bolígrafo, por ejemplo) a través de una lupa situada a 10 cm, este se ve notablemente ampliado. Al variar la distancia se modifica el tamaño. La relación entre ambas variables es (para una cierta lupa):

$$A = \frac{2}{2-d}$$



d = distancia de la lupa al objeto (en dm)

A = aumento (número por el que se multiplica el tamaño)

a) Para $d = 0$, $A = 1$. ¿Qué significa esto?

b) Calcula el valor de A para $d = 1$.

c) Si damos a d los valores 1,5; 1,9 y 1,99, se obtienen valores de A cada vez más grandes. ¿Por qué?

d) Para $d = 3$, se obtiene $A = -1$. ¿Qué significa el signo menos?

a) Si se pega la lupa al objeto, el tamaño que se ve es el real. Es decir, no aumenta.

b) $d = 1 \rightarrow A = \frac{2}{2-1} = 2$

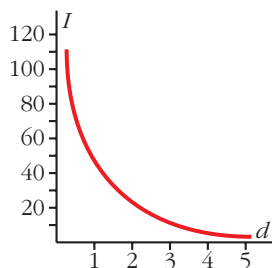
c) El denominador se va haciendo cada vez más pequeño. Al dividir 2 por un número cada vez más cercano a cero, el resultado es cada vez mayor.

d) Significa que la imagen se ha invertido.

Ruido y silencio

La intensidad del sonido que nos llega de un foco sonoro depende de la distancia a la que nos encontremos de él. Supongamos que:

$$I = \frac{100}{d^2} \quad \begin{array}{l} I = \text{intensidad (en decibelios)} \\ d = \text{distancia (en m)} \end{array}$$



■ Averigua a qué distancia hemos de estar para que la intensidad sea de 16 db.

$$16 = \frac{100}{d^2} \rightarrow d^2 = \frac{100}{16} \rightarrow d = \sqrt{6,25} = 2,5 \text{ m}$$

Debemos estar a 2,5 metros del foco sonoro.

Funciones trozo a trozo

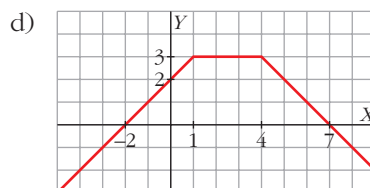
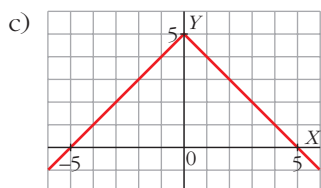
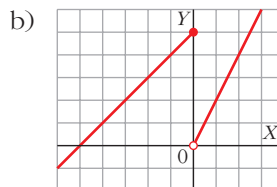
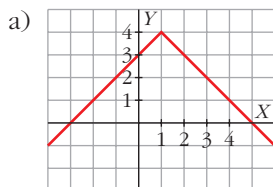
■ Representa gráficamente las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } y = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } y = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 7 - x & \text{si } x > 4 \end{cases}$$



Página 107

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $y = \sqrt{x - 1}$

c) $y = \sqrt{1 - x}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

f) $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$

g) $y = 1/\sqrt{x - 1}$

h) $y = 1/\sqrt{1 - x}$

i) $y = 1/\sqrt{4 - x^2}$

j) $y = 1/\sqrt{x^2 - 4}$

k) $y = x^3 - 2x + 3$

l) $y = \frac{1}{x}$

m) $y = \frac{1}{x^2}$

n) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

ñ) $y = \frac{1}{x^2 + 4}$

o) $y = \frac{1}{x^3 + 1}$

p) El área de un cuadrado de lado variable, l , es $A = l^2$.

a) \mathbb{R}

b) $[1, \infty)$

c) $(-\infty, 1]$

d) $[-2, 2]$

e) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

f) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

g) $(1, \infty)$

h) $(-\infty, 1)$

i) $(-2, 2)$

j) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

k) \mathbb{R}

l) $\mathbb{R} - \{0\}$

m) $\mathbb{R} - \{0\}$

n) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

ñ) \mathbb{R}

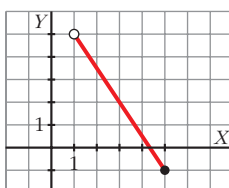
o) $\mathbb{R} - \{-1\}$

p) $l > 0$

Página 108

1. Representa la siguiente función:

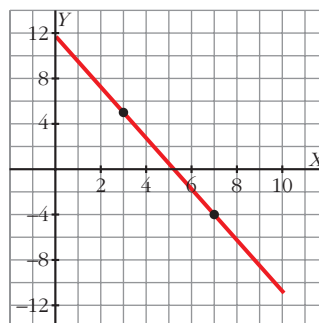
$$y = -2x + 7, \quad x \in (1, 4]$$



- 2. Una función lineal f cumple: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$, $\text{Dom}(f) = [0, 10]$. ¿Cuál es su expresión analítica? Representala.**

$$m = \frac{-4 - 5}{7 - 3} = -\frac{9}{4}$$

$$y = 5 - \frac{9}{4}(x - 3) = -\frac{9}{4}x + \frac{47}{4}, \quad x \in [0, 10]$$



Página 109

- 1. En una Universidad, el año 2002 había matriculados 10 400 alumnos, y en el año 2007, 13 200. Estimar cuántos había:**

a) En el año 2003. b) En el 2005. c) En el 2000.

d) ¿Cuántos cabe esperar que haya en el 2010?

e) ¿Y en el 2040?

$$f(x) = \frac{13\,200 - 10\,400}{2007 - 2002}(x - 2002) + 10\,400 = 560(x - 2002) + 10\,400$$

a) $f(2003) = 560 + 10\,400 = 10\,960$ alumnos.

b) $f(2005) = 1\,680 + 10\,400 = 12\,080$ alumnos.

c) $f(2000) = -1\,120 + 10\,400 = 9\,280$ alumnos.

d) $f(2010) = 4\,480 + 10\,400 = 14\,880$ alumnos.

e) $f(2040) = 21\,280 + 10\,400 = 31\,680$ alumnos, aunque la extrapolación es demasiado grande.

- 2. El consumo de gasolina de cierto automóvil, por cada 100 km, depende de su velocidad. A 60 km/h consume 5,7 l y a 90 km/h consume 7,2 l.**

a) Estima su consumo si recorre 100 km a 70 km/h.

b) ¿Cuánto consumirá a 100 km/h?

c) ¿Y a 200 km/h?

$$a) f(x) = \frac{7,2 - 5,7}{90 - 60}(x - 60) + 5,7 = \frac{1,5}{30}(x - 60) + 5,7$$

$$f(70) = 0,5 + 5,7 = 6,2 \text{ l}$$

$$b) f(100) = 2 + 5,7 = 7,7 \text{ l}$$

$$c) f(200) = 7 + 5,7 = 12,7 \text{ l, aunque la extrapolación es demasiado grande.}$$

Página 110

1. Representa estas parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 3$

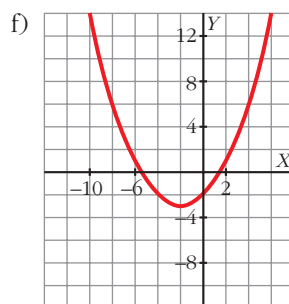
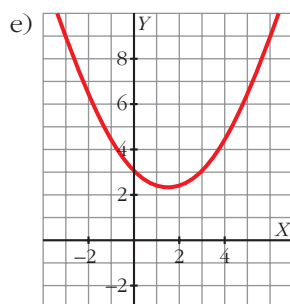
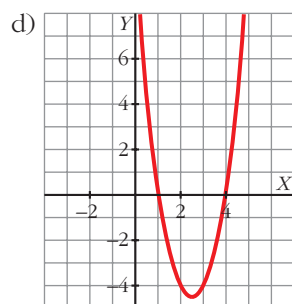
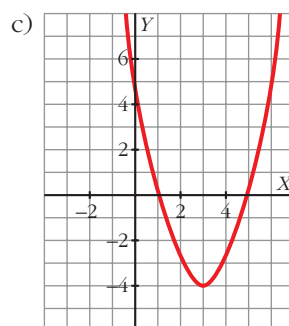
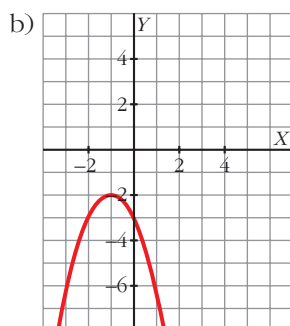
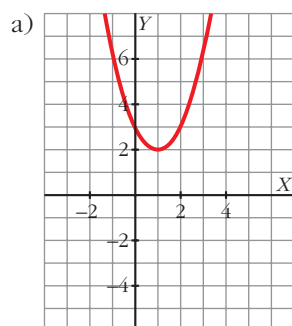
b) $y = -x^2 - 2x - 3$

c) $y = x^2 - 6x + 5$

d) $y = 2x^2 - 10x + 8$

e) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$

f) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

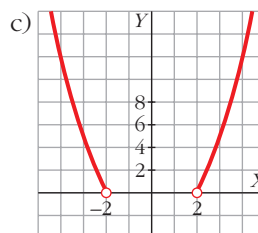
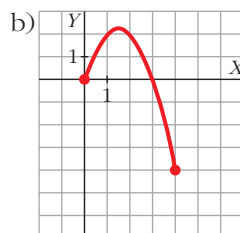
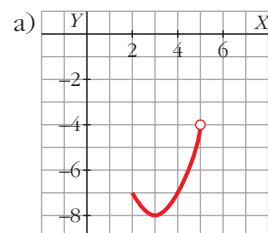


2. Representa las funciones siguientes:

a) $y = x^2 - 6x + 1, x \in [2, 5)$

b) $y = -x^2 + 3x, x \in [0, 4]$

c) $y = x^2 - 4, x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



Página 111

3. Las gráficas de la derecha (roja y verde) tienen por ecuaciones $y = \frac{a}{x}$ e $y = \sqrt{bx}$.

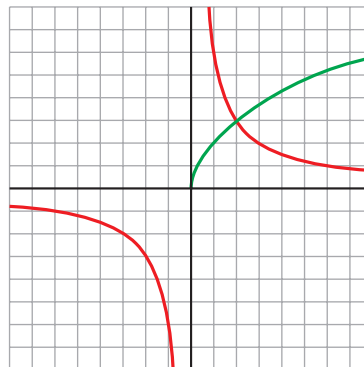
Di qué ecuación corresponde a cada gráfica y averigua los valores de a y de b .

$y = \frac{a}{x}$ es la roja. $y = \sqrt{bx}$ es la verde.

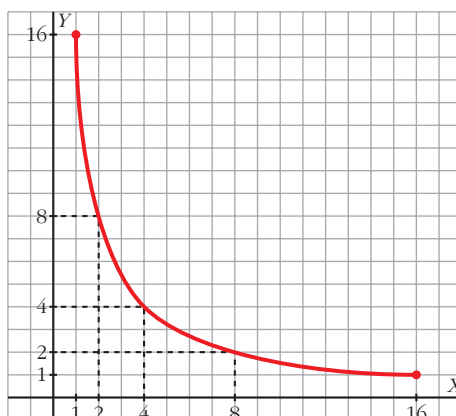
Basta con fijarse en los dominios.

La roja pasa por $(2, 3)$, luego $3 = \frac{a}{2} \rightarrow a = 6$

La verde pasa por $(1, 2)$, luego $2 = \sqrt{b \cdot 1} \rightarrow b = 4$



4. Representa: $y = \frac{16}{x}$, $1 \leq x \leq 16$



5. Representa: $y = \sqrt{9x}$, $0 \leq x \leq 25$

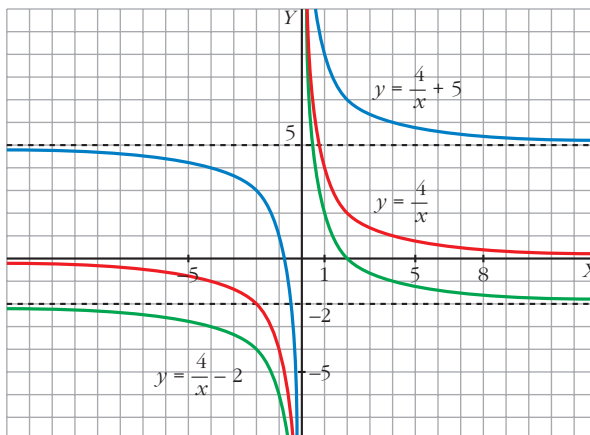


Página 112

1. Representa $y = \frac{4}{x}$ y, a partir de ella, estas otras:

a) $y = \frac{4}{x} + 5$

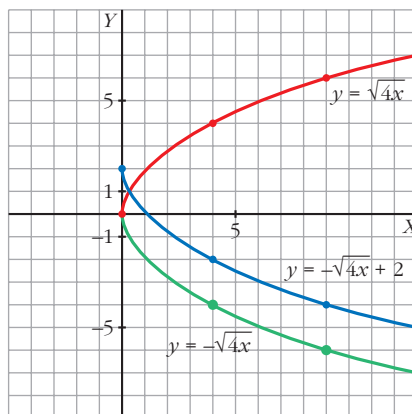
b) $y = \frac{4}{x} - 2$



2. Representa $y = \sqrt{4x}$ y, a partir de ella:

a) $y = -\sqrt{4x}$

b) $y = -\sqrt{4x} + 2$



Página 113

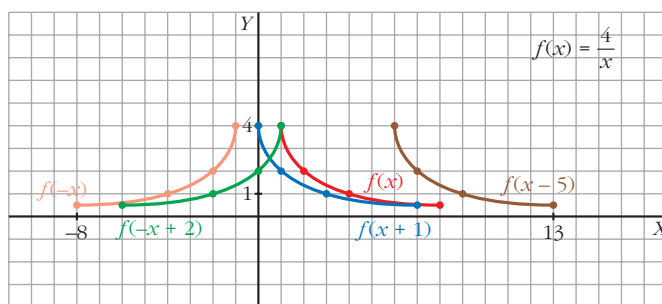
3. Llamamos $f(x)$ a $y = \frac{4}{x}$ para $x > 1$. A partir de ella, representa:

a) $y = f(x - 5)$

b) $y = f(x + 1)$

c) $y = f(-x)$

d) $y = f(-x + 2)$



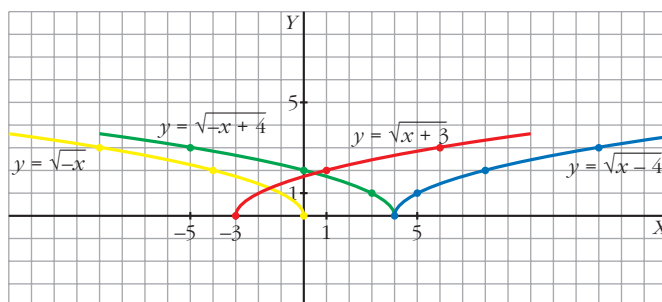
4. Representa:

a) $y = \sqrt{x-4}$

b) $y = \sqrt{x+3}$

c) $y = \sqrt{-x}$

d) $y = \sqrt{-x+4}$

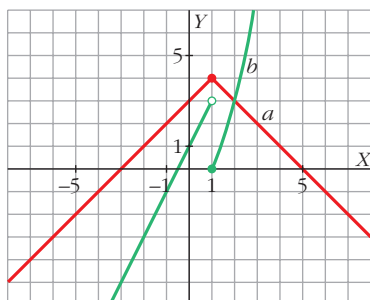


Página 114

1. Representa:

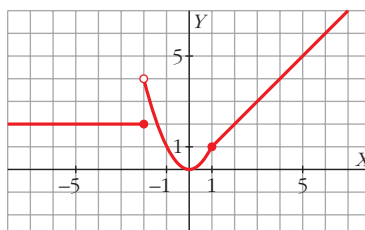
a) $y = \begin{cases} x+3, & x < 1 \\ 5-x, & x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ x^2-1, & x \geq 1 \end{cases}$



2. Representa:

$$y = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Página 115

1. Representa las siguientes funciones relacionadas con la función parte entera:

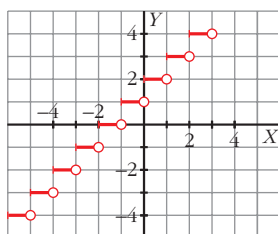
a) $y = \text{Ent}(x) + 2$

b) $y = \text{Ent}(x + 0,5)$

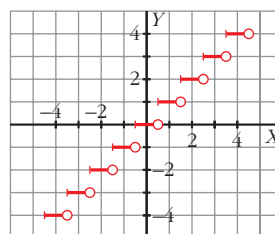
c) $y = \text{Ent}\left(\frac{x}{4}\right)$

d) $y = \text{Ent}(3x)$

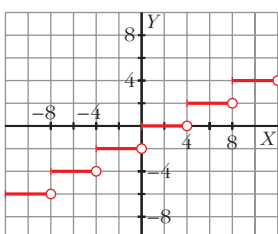
a) $y = \text{Ent}(x) + 2$



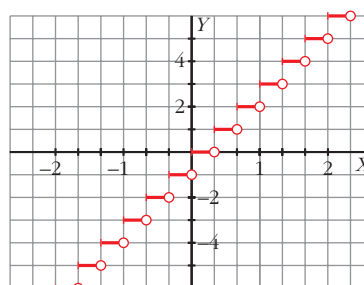
b) $y = \text{Ent}(x + 0,5)$



c) $y = \text{Ent}\left(\frac{x}{4}\right)$



d) $y = \text{Ent}(3x)$

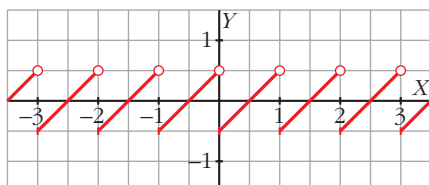


2. Representa:

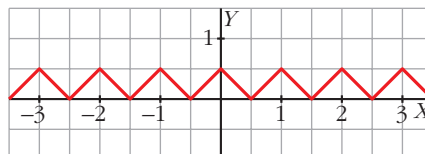
a) $y = \text{Mant}(x) - 0,5$ b) $y = |\text{Mant}(x) - 0,5|$ c) $y = 0,5 - |\text{Mant}(x) - 0,5|$

Comprueba que esta última significa la distancia de cada número al entero más próximo. Su gráfica tiene forma de sierra.

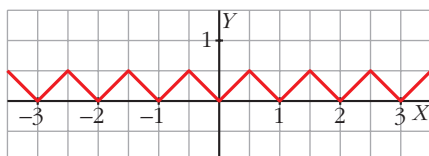
a) $y = \text{Mant}(x) - 0,5$



b) $y = |\text{Mant}(x) - 0,5|$

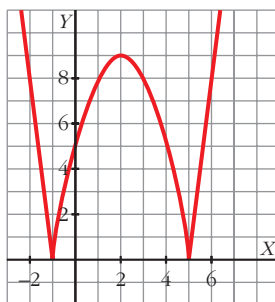


c) $y = 0,5 - |\text{Mant}(x) - 0,5|$

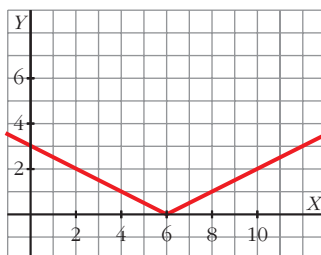


Página 116

1. Representa: $y = -x^2 + 4x + 5$



2. Representa gráficamente: $y = \left| \frac{x}{2} - 3 \right|$



Página 123

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Dominio de definición

1 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \frac{3}{x^2 + x}$

b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \frac{x-1}{2x+1}$

d) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \frac{2}{5x - x^2}$

f) $y = \frac{1}{x^2 - 2}$

a) $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$

b) $\mathbb{R} - \{2\}$

c) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$

d) \mathbb{R}

e) $\mathbb{R} - \{0, 5\}$

f) $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

2 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{3-x}$

b) $y = \sqrt{2x-1}$

c) $y = \sqrt{-x-2}$

d) $y = \sqrt{-3x}$

a) $(-\infty, 3]$

b) $[1/2, +\infty)$

c) $(-\infty, -2]$

d) $(-\infty, 0]$

3 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

b) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

c) $y = \sqrt{12x - 2x^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

e) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x}}$

a) $x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow (x+3)(x-3) \geq 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

b) $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

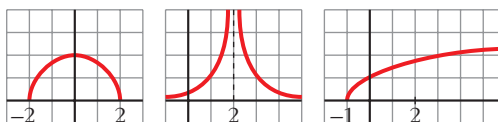
c) $12x - 2x^2 \geq 0 \rightarrow 2x(6-x) \geq 0 \rightarrow \text{Dominio} = [0, 6]$

d) $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \rightarrow (x+1)(x-5) \geq 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

e) $4-x > 0 \rightarrow 4 > x \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, 4)$

f) $x^2 - 3x > 0 \rightarrow x(x-3) > 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

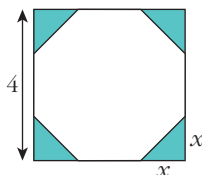
- 4** Observando la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:



Los dominios son, por orden: $[-2, 2]$; $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ y $[-1, +\infty)$.

Los recorridos son, por orden: $[0, 2]$, $(0, +\infty)$ y $[0, +\infty)$.

- 5** De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x .



a) Escribe el área del octógono que resulta en función de x .

b) ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?

a) $A(x) = 16 - 2x^2$

b) Dominio: $(0, 2)$. Recorrido: $(8, 16)$

- 6** Una empresa fabrica envases con forma de prisma de dimensiones x , $x/2$ y $2x$ cm.

a) Escribe la función que da el volumen del envase en función de x .

b) Halla su dominio sabiendo que el envase más grande tiene 1 l de volumen. ¿Cuál es su recorrido?

a) $V(x) = x^3$

b) Dominio: $(0, 10)$. Recorrido: $(0, 1000)$

Funciones lineales. Interpolación

- 7** Di cuál es la pendiente de cada recta:

a) $y = 2x - 5$

b) $2x - y + 1 = 0$

c) $x + y - 5 = 0$

d) $y = 5$

a) 2

b) 2

c) -1

d) 0

8 Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Pasa por $P(1, -5)$ y $Q(10, 11)$.

b) Pasa por $(-7, 2)$ y su pendiente es $-0,75$.

c) Corta a los ejes en $(3,5; 0)$ y $(0, -5)$.

d) Es paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$ y pasa por $(-2, -3)$.

$$a) m = \frac{11 - (-5)}{10 - 1} = \frac{16}{9}$$

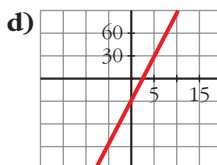
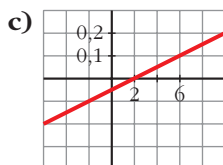
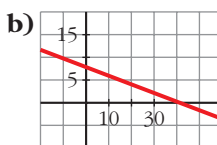
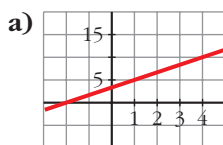
$$y = -5 + \frac{16}{9}(x - 1) = \frac{16}{9}x - \frac{61}{9}$$

$$b) y = 2 - 0,75(x + 7) = -0,75x - 3,25$$

$$c) \frac{x}{3,5} + \frac{y}{-5} = 1 \rightarrow y = \frac{10}{7}x - 5$$

$$d) m = 3; y = -3 + 3(x + 2) = 3x + 3$$

9 Elige dos puntos en cada una de estas rectas y escribe su ecuación:



$$a) y = \frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$$

$$b) y = -\frac{1}{5}x + 8$$

$$c) y = 0,025x - 0,05$$

$$d) y = 12x - 30$$

10 Calcula, mediante interpolación o extrapolación lineal, los valores de y que faltan en cada tabla:

a)

x	0,45	0,5	0,6
y	2	...	0,25

b)

x	47	112	120
y	18	37	...

c)

x	3	7	13	15
y	-5	...	4	...

d)

x	825	1 000	2 015
y	2 500	...	4 516

a) $y = 2 - 11,6(x - 0,45) \rightarrow y_0 = 2 - 11,6(0,5 - 0,45) = 1,42$
b) $y = 18 + 0,292(x - 47) \rightarrow y_0 = 18 + 0,292(120 - 47) = 39,32$
c) $y = -5 + 0,9(x - 3) \rightarrow y_0 = -5 + 0,9(7 - 3) = -1,4$
 $y_1 = -5 + 0,9(15 - 3) = 5,8$
d) $y = 2500 + 1,69(x - 825) \rightarrow y_0 = 2500 + 1,69(1000 - 825) = 2795,75$

11 Esta tabla muestra la temperatura atmosférica tomada a diferentes alturas:

ALTURA (m)	0	500	1000	1500
TEMPERATURA (°C)	15	11,7	8,4	5,1

Calcula la temperatura a 1 200 m y a 2 000 m.

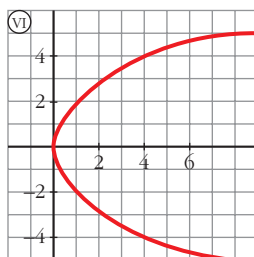
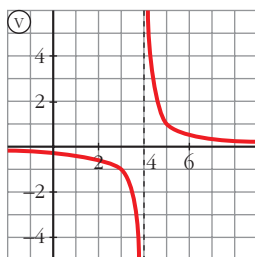
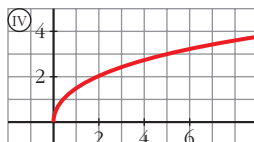
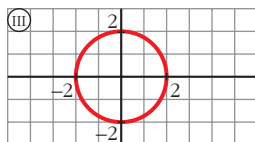
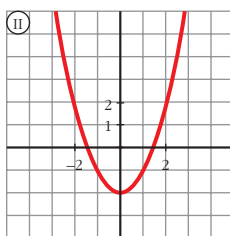
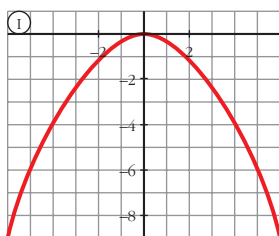
$y = 15 - 0,0066x \rightarrow f(1\,200) = 15 - 0,0066 \cdot 1\,200 = 7,08$
 $f(2\,000) = 15 - 0,0066 \cdot 2\,000 = 1,8$

Página 124

Gráfica y expresión analítica

12 Dos de estas gráficas no son funciones. Di cuáles son y asocia a cada una de las otras cuatro la expresión analítica que le corresponde.

a) $y = \sqrt{2x}$ b) $y = -0,25x^2$ c) $y = \frac{1}{x-4}$ d) $y = x^2 - 2$



No son funciones III y VI.

a) \rightarrow IV

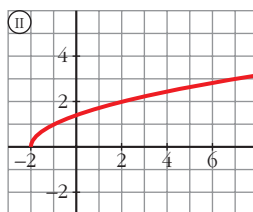
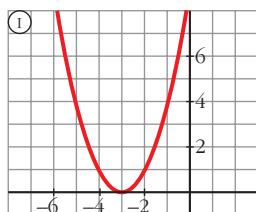
b) \rightarrow I

c) \rightarrow V

d) \rightarrow II

13 Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:

a) $y = \frac{1}{x} + 2$ b) $y = \frac{1}{x+3}$ c) $y = (x+3)^2$ d) $y = \sqrt{x+2}$

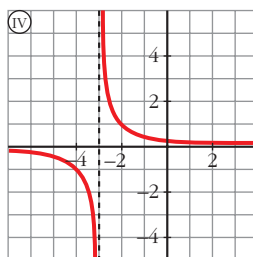
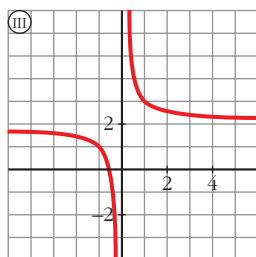


a) \rightarrow III

b) \rightarrow IV

c) \rightarrow I

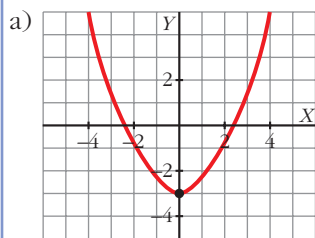
d) \rightarrow II



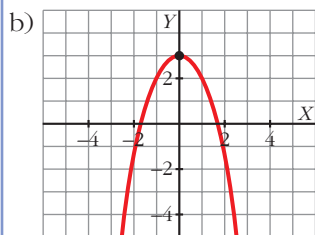
Representación de funciones elementales

14 Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:

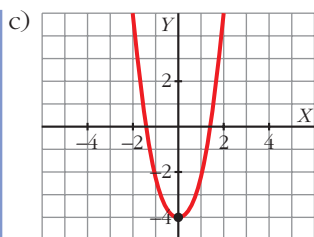
a) $y = 0,5x^2 - 3$ b) $y = -x^2 + 3$ c) $y = 2x^2 - 4$ d) $y = -\frac{3x^2}{2}$



Vértice: $(0, -3)$. Corte con los ejes: $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$, $(0, -3)$

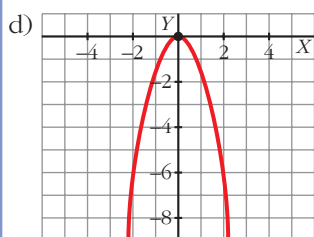


Vértice: $(0, 3)$. Corte con los ejes: $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, 3)$



Vértice: $(0, -4)$.

Corte con los ejes: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, -4)$



Vértice: $(0, 0)$.

Corte con los ejes: $(0, 0)$

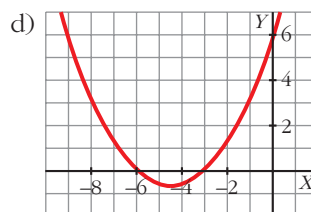
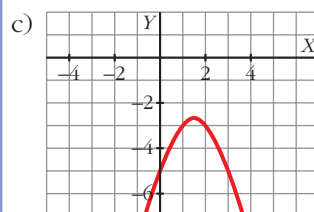
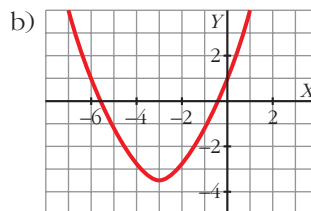
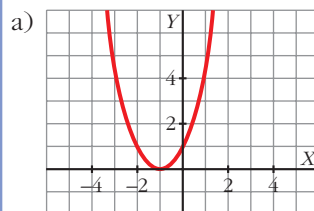
15 Representa las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $y = \frac{x^2}{2} + 3x + 1$

c) $y = -x^2 + 3x - 5$

d) $y = \frac{x^2}{3} + 3x + 6$



- 16** En las siguientes parábolas, halla el vértice y comprueba que ninguna de ellas corta el eje de abscisas.

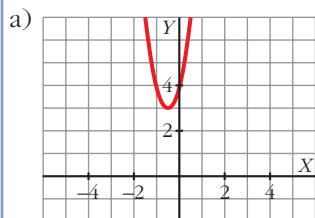
Obtén algún punto a la derecha y a la izquierda del vértice y represéntalas gráficamente:

a) $y = 4(x^2 + x + 1)$

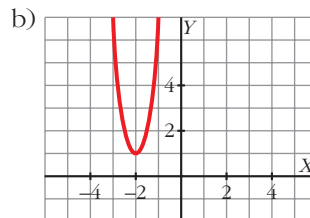
b) $y = 5(x + 2)^2 + 1$

c) $y = -x^2 - 2$

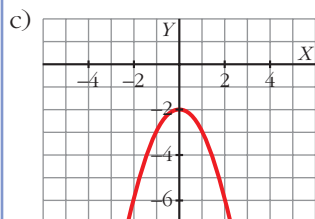
d) $y = -\frac{3}{4}(x^2 + 2)$



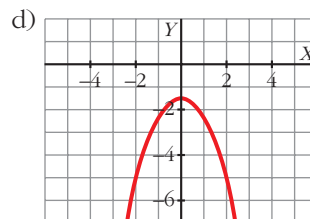
Vértice: $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$



Vértice: $(-2, 1)$



Vértice: $(0, -2)$



Vértice: $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

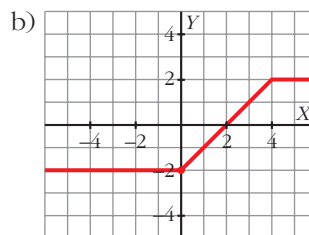
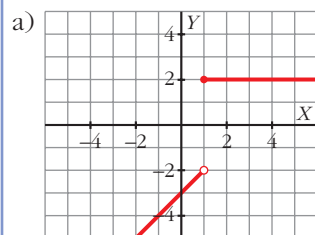
- 17** Representa gráficamente las siguientes funciones:

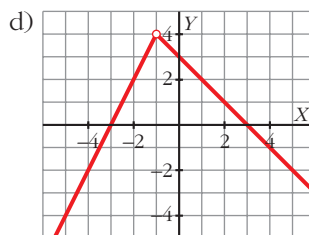
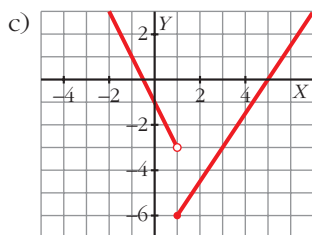
a) $y = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (3x - 15)/2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$





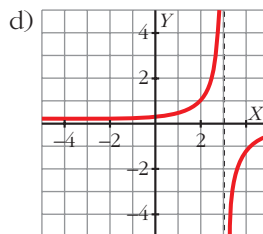
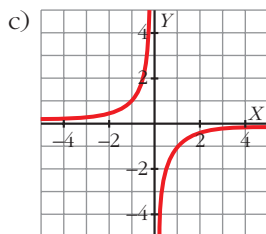
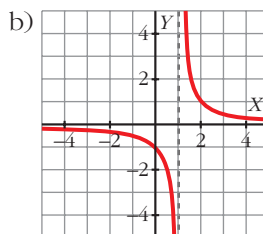
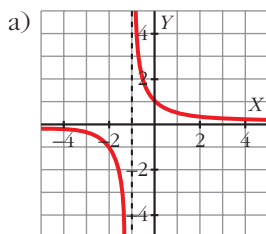
18 Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x+1}$

b) $y = \frac{1}{x-1}$

c) $y = \frac{-1}{x}$

d) $y = \frac{-1}{x-3}$



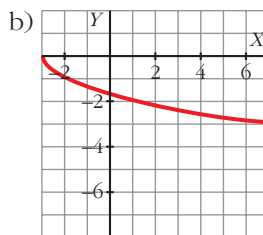
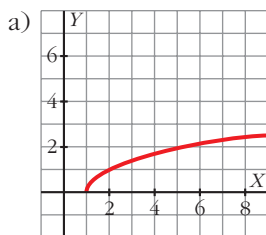
19 Representa las siguientes funciones:

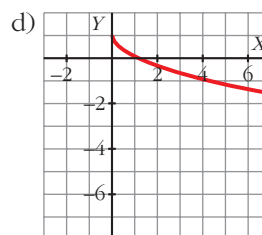
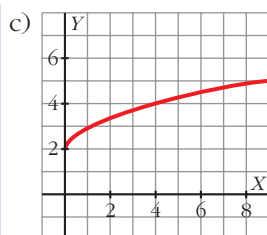
a) $y = \sqrt{x-1}$

b) $y = -\sqrt{x+3}$

c) $y = 2 + \sqrt{x}$

d) $y = 1 - \sqrt{x}$





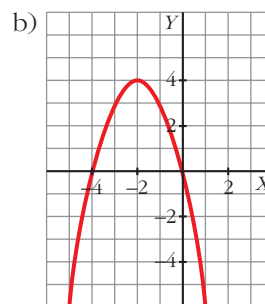
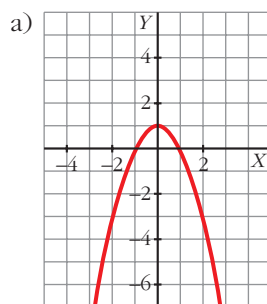
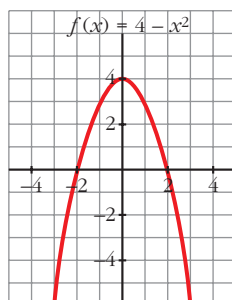
Página 125

Transformaciones en una función

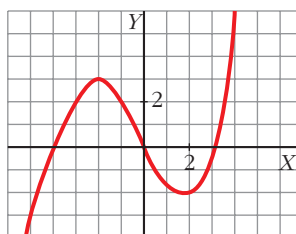
20 Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:

a) $g(x) = f(x) - 3$

b) $h(x) = f(x + 2)$



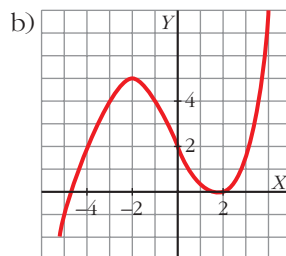
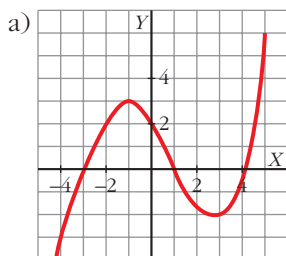
21 Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:



Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = f(x - 1)$

b) $y = f(x) + 2$



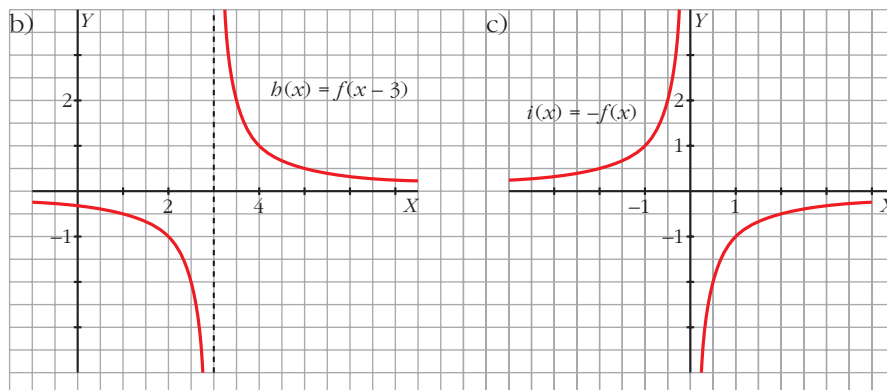
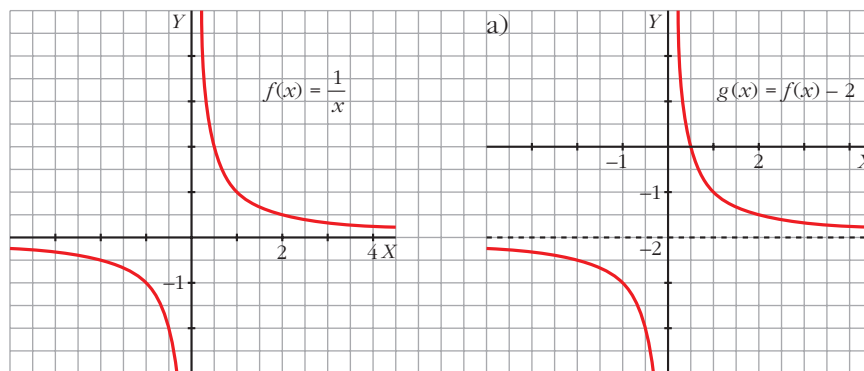
22 A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:

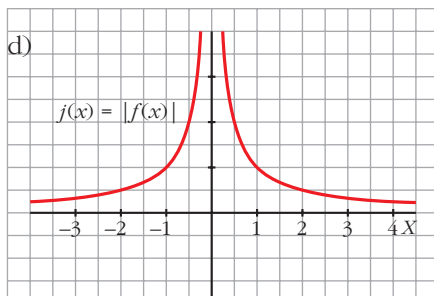
a) $g(x) = f(x) - 2$

b) $h(x) = f(x - 3)$

c) $i(x) = -f(x)$

d) $j(x) = |f(x)|$





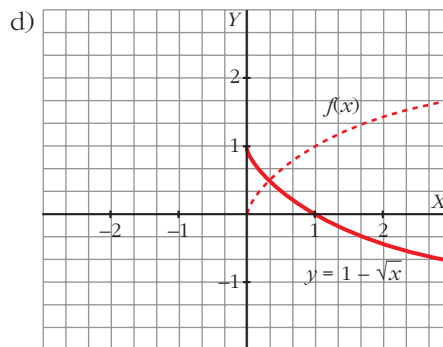
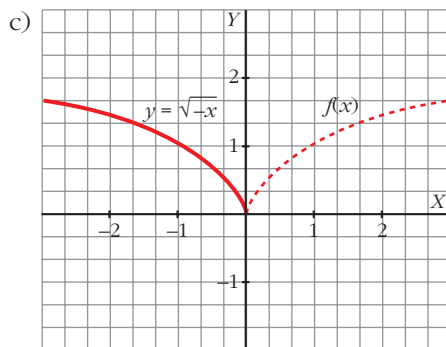
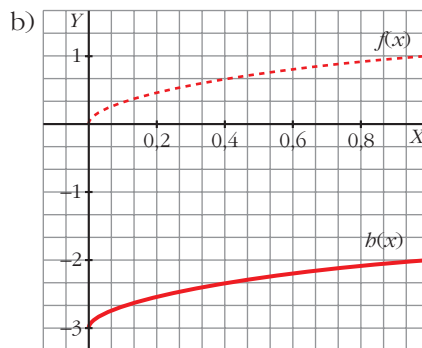
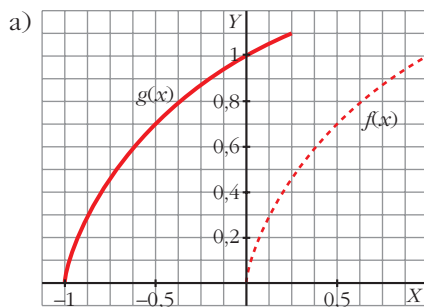
23 Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja a partir de ella:

a) $g(x) = \sqrt{x+1}$

b) $b(x) = \sqrt{x} - 3$

c) $y = \sqrt{-x}$

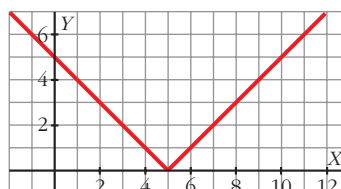
d) $y = 1 - \sqrt{x}$



Valor absoluto de una función

24 Representa la función $y = |x - 5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:

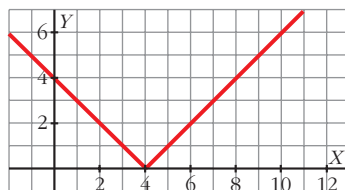
$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



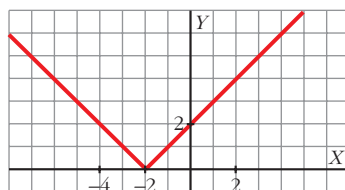
25 Representa las siguientes funciones y defínelas por intervalos:

a) $y = |4 - x|$ b) $y = |x + 2|$ c) $y = |x - 3|$ d) $y = |-x - 3|$

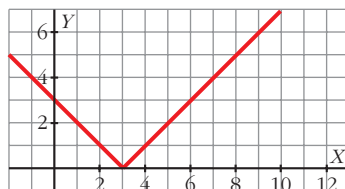
a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



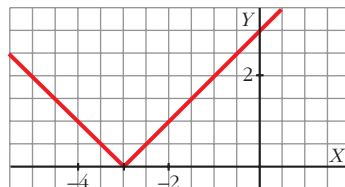
b) $y = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$



c) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



d) $y = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x \leq -3 \\ x + 3 & \text{si } x > -3 \end{cases}$



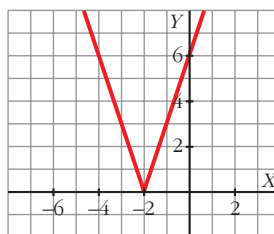
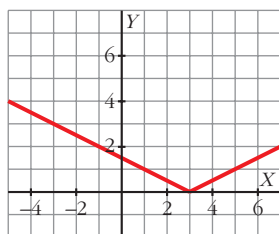
26 Representa y define como funciones “a trozos”:

a) $y = \left| \frac{x-3}{2} \right|$ b) $y = |3x + 6|$ c) $y = \left| \frac{2x-1}{3} \right|$ d) $y = |-x - 1|$

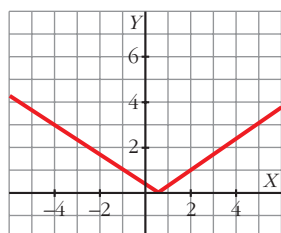
• Mira el ejercicio resuelto número 8.

a) $y = \begin{cases} -\frac{x-3}{2} & \text{si } x < 3 \\ \frac{x-3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

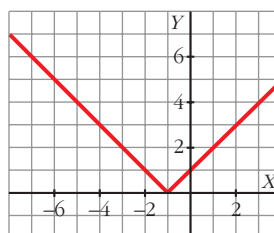
b) $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$



$$c) y = \begin{cases} \frac{-2x+1}{3} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \frac{2x-1}{3} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$d) y = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$



PARA RESOLVER

- 27** La factura de la energía eléctrica de una familia ha sido en noviembre 95 € por 375 kWh de consumo, y en enero 130,4 € por 552 kWh.

¿Cuánto tendrán que pagar si consumen 420 kWh?

$$y = 95 + 0,2(x - 375)$$

$$y(420) = 104 \text{ euros}$$

- 28** Las ventas obtenidas por una empresa han sido de 28 000 € con unos gastos en publicidad de 3 000 € y de 39 000 € con unos gastos publicitarios de 5 000 €.

Estima cuáles serán las ventas si se invierte en publicidad 4 000 €.

$$y = 28\,000 + 5,5(x - 3\,000)$$

$$y(4\,000) = 33\,500 \text{ euros}$$

- 29** El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros, y por 168 km, 13,4 euros.

Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km.

$$y = 2,85 + 0,095(x - 57)$$

$$y(100) = 6,94 \text{ euros}$$

- 30** Un rectángulo tiene 20 cm de perímetro. Escribe la función que da el área de ese rectángulo en función de su base x .

¿Cuál es el dominio de esa función?



$$2x + 2y = 20; \quad A = x \cdot y$$

$$A(x) = 10x - x^2; \quad \text{Dom} = (0, 10)$$

- 31** Observamos en una farmacia una tabla con los pesos de los niños menores de 12 años, según su edad:

x (años)	1	3	6	9
y (kg)	10	14	20	26

Estima el peso de un niño a los 5 años y a los 10 años.

$$y = 10 + 2(x - 1)$$

$$y = 10 + 2 \cdot 4 = 18 \text{ kg a los 5 años.}$$

$$y = 10 + 2 \cdot 9 = 28 \text{ kg a los 10 años.}$$

- 32** Los gastos fijos mensuales de una empresa por la fabricación de x televisores son $G = 2000 + 25x$, en euros, y los ingresos mensuales son $I = 60x - 0,01x^2$, también en euros. ¿Cuántos televisores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

La función *Beneficio* viene dada por la expresión:

$$B = I - G = 50x - 0,02x^2 - 3000 - 25x = -0,02x^2 + 25x - 3000$$

Se trata de una parábola con las ramas hacia abajo.

El máximo de la función se encuentra en el vértice:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-25}{-0,04} = 625$$

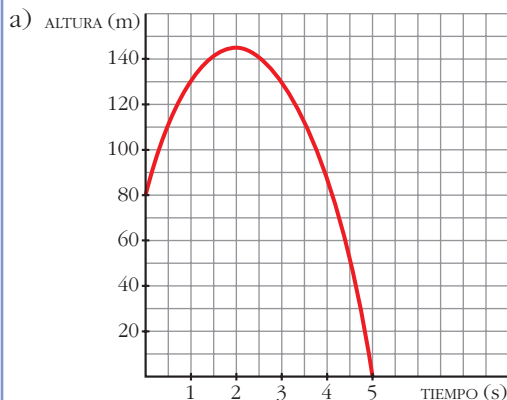
El beneficio máximo se obtendrá para 625 televisores.

- 33** Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h = 80 + 64t - 16t^2$ (t en segundos y h en metros).

a) Dibuja la gráfica en el intervalo $[0, 5]$.

b) Halla la altura del edificio.

c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?



b) 80 metros.

c) 2 segundos.

Página 126

- 34** El precio de venta de un artículo viene dado por $p = 12 - 0,01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).

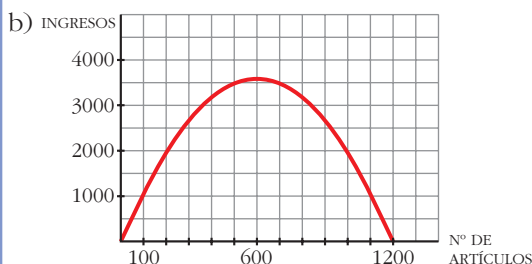
a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

b) Representa la función *Nº de artículos-Ingresos obtenidos*.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$$12 - 0,01 \cdot 500 = 7 \text{ cientos de euros} \rightarrow \text{Ingresos} = 350\,000 \text{ €}$$



$$I(x) = p \cdot x = 12x - 0,01x^2$$

c) Deben fabricar 600 artículos para obtener los ingresos máximos (360 000 euros).

- 35** Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 menos.

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Qué subida produce ingresos máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

$$b) I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$$

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \rightarrow 5 \text{ euros}$$

- 36** El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - x/4$ euros.

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

• Los ingresos por la venta de x unidades son $x(50 - x/4)$ euros.

$$a) B(x) = 50x - \frac{x^2}{4} - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25 \right) = -\frac{x^2}{2} + 15x - 25$$

b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola: $x = \frac{-15}{-1} = 15$

Deben venderse 15 unidades.

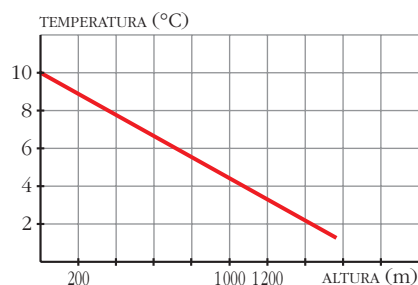
- 37** En la base de una montaña de 1 200 m, la temperatura es de 10 °C y sabemos que baja 1 °C por cada 180 m de ascensión. ¿Cuál será la temperatura en la cima?

Representa la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.

$$y = 10 - \frac{1}{180}x$$

$$\text{Si } x = 1200 \rightarrow y = 10 - \frac{1200}{180} = 3,3$$

La temperatura en la cima será de 3,3 °C.



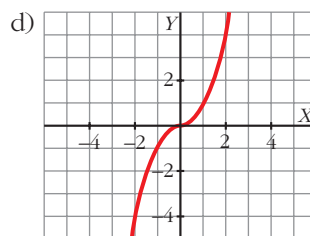
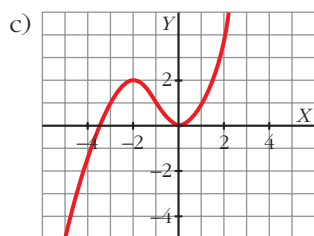
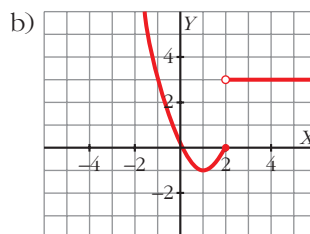
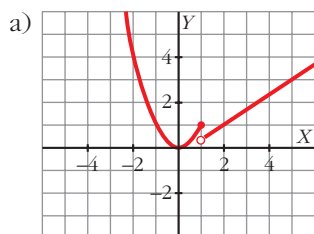
- 38** Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

$$a) y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (2x-1)/3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$c) y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

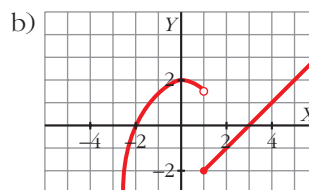
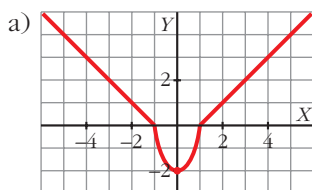
$$d) y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



39 Representa:

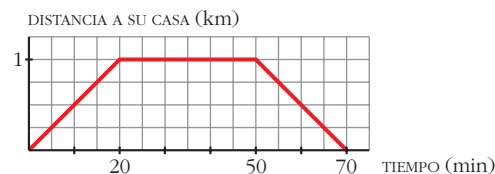
$$a) y = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2-2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} -x^2/2 + 2 & \text{si } x < 1 \\ x-3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



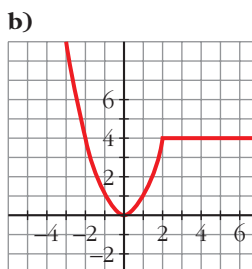
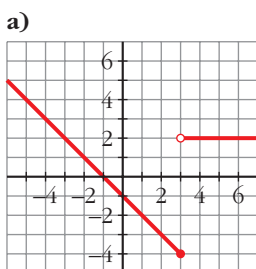
- 40 Elena va a visitar a su amiga Ana y tarda 20 minutos en llegar a su casa, que está a 1 km de distancia. Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida.

Representa la función *tiempo-distancia* y busca su expresión analítica.



$$f(x) = \begin{cases} (1/20)x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 1 & \text{si } 20 < x \leq 50 \\ -1/20(x-70) & \text{si } 50 < x \leq 70 \end{cases}$$

41 Busca la expresión analítica de estas funciones:



$$a) f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

42 Representa y define como funciones “a trozos”:

a) $y = |x^2 - 4|$

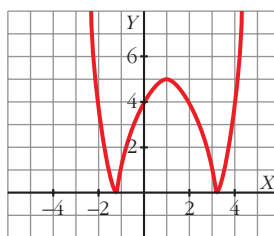
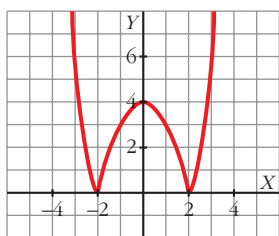
b) $y = |x^2 - 2x - 4|$

c) $y = \left| -\frac{x^2}{2} + 2 \right|$

d) $y = |x^2 + 2x - 2|$

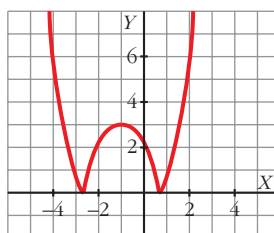
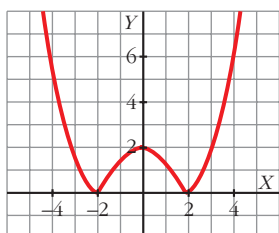
a) $y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 4 & \text{si } x < -1,2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } -1,2 \leq x \leq 3,2 \\ x^2 - 2x - 4 & \text{si } x > 3,2 \end{cases}$



c) $y = \begin{cases} (x^2/2) - 2 & \text{si } x < -2 \\ (-x^2/2) + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ (x^2/2) - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

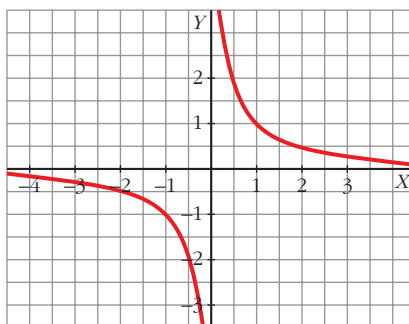
d) $y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{si } x < -2,7 \\ -x^2 - 2x + 2 & \text{si } -2,7 \leq x \leq 0,7 \\ x^2 + 2x - 2 & \text{si } x > 0,7 \end{cases}$



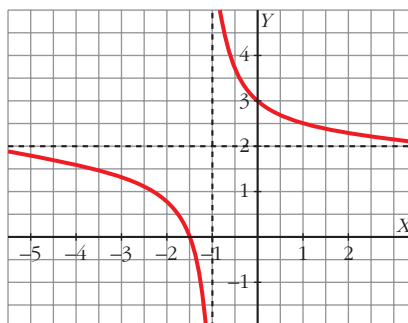
43 Utilizando la relación $\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$ podemos escribir la

función $y = \frac{2x+3}{x+1}$ de esta forma: $y = 2 + \frac{1}{x+1}$. Comprueba que su gráfica coincide con la de $y = 1/x$ trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 2 hacia arriba.

$y = \frac{1}{x}$



$$y = 2 + \frac{1}{x+1}$$



44 Representa, utilizando el procedimiento del ejercicio anterior:

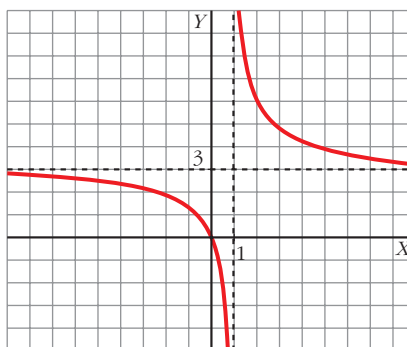
a) $y = \frac{3x}{x-1}$

b) $y = \frac{x-2}{x-4}$

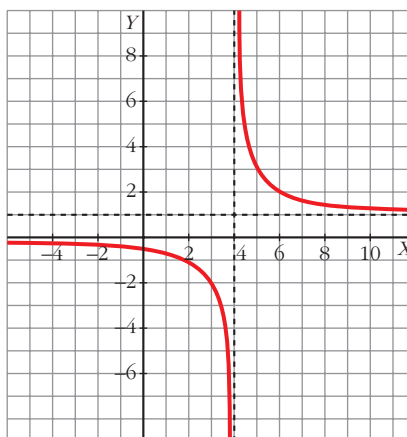
c) $y = \frac{-x-2}{x+3}$

d) $y = \frac{2x-3}{x-1}$

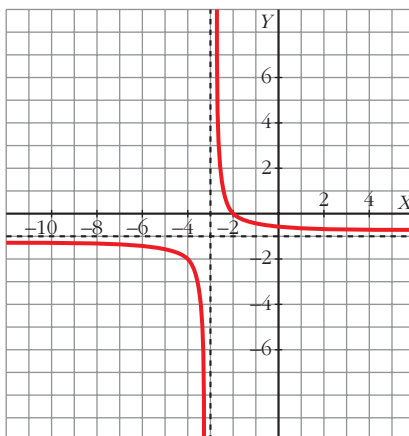
a) $y = \frac{3x}{x-1} = 3 + \frac{3}{x-1}$



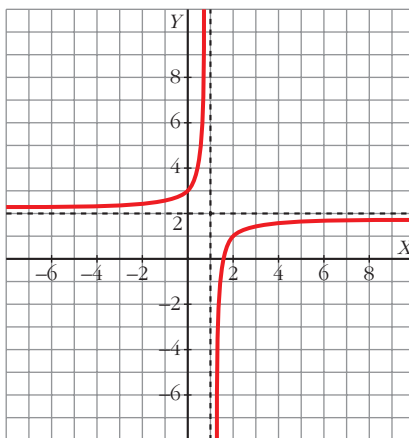
b) $y = \frac{x-2}{x-4} = 1 + \frac{2}{x-4}$



$$c) y = \frac{-x-2}{x+3} = -1 + \frac{1}{x+3}$$



$$d) y = \frac{2x-3}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}$$



Página 127

CUESTIONES TEÓRICAS

- 45** Una parábola corta el eje de abscisas en $x = -1$ y en $x = 3$. La ordenada del vértice es $y = -4$. ¿Cuál es la ecuación de esa parábola?

$$f(x) = k(x+1)(x-3) = k(x^2 - 2x - 3)$$

$$\text{Vértice} \rightarrow x = \frac{3+(-1)}{2} = 1; f(1) = -4k = -4 \rightarrow k = 1$$

La ecuación de la parábola será, por tanto: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

- 46** Encuentra los valores de c para que la función $y = -x^2 + 12x + c$ tenga con el eje de abscisas:

- a) Dos puntos de corte.
b) Un punto de corte.
c) Ningún punto de corte.

$$b^2 - 4ac = 144 + 4c$$

a) $144 + 4c > 0 \rightarrow c > -36$

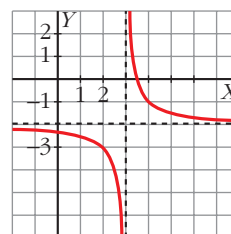
b) $144 + 4c = 0 \rightarrow c = -36$

c) $144 + 4c < 0 \rightarrow c < -36$

- 47** Esta es la gráfica de una función del tipo:

$$y = a + \frac{1}{x-b}$$

¿Cuáles son los valores de a y b en esa gráfica?



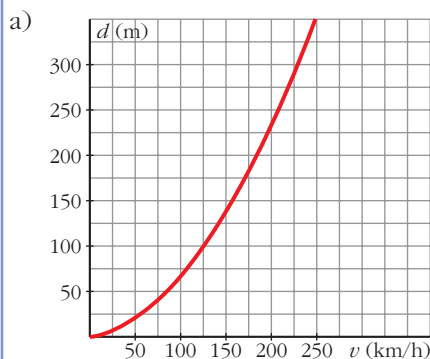
$a = -2; b = 3$

PARA PROFUNDIZAR

- 48** La distancia que recorre un vehículo desde que se pisa el freno hasta que se para es:

$$d = \frac{v^2}{200} + \frac{v}{6} \quad (d \text{ en metros y } v \text{ en km/h})$$

- a) Representa la función en el intervalo $[0, 240]$.
b) Si un obstáculo está a 100 m, ¿cuál debe ser la velocidad máxima que puede llevar el automóvil para evitar el accidente?



b) $100 = \frac{v^2}{200} + \frac{v}{6}$

$$120\,000 = 6v^2 + 200v$$

$$6v^2 + 200v - 120\,000 = 0$$

$$v = \frac{-200 \pm \sqrt{2\,920\,000}}{12} =$$

$$= \begin{cases} v_1 = -159,07 & (\text{no vale}) \\ v_2 = 125,73 \end{cases}$$

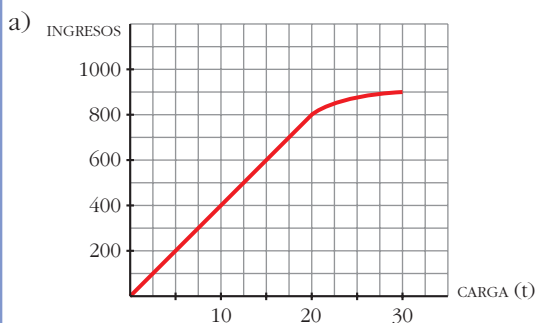
La velocidad debe ser menor de 125 km/h.

49 Las tarifas de una empresa de transportes son:

- 40 euros por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 t.
- Si la carga es mayor que 20 t, se restará, de los 40 euros, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.

a) Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 t).

b) Obtén la expresión analítica y represéntala.



$$b) f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ [40 - (x - 20)]x & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Es decir:

$$f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Página 127

AUTOEVALUACIÓN

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - x^2$

b) $y = \frac{3x}{(2x-6)^2}$

c) $y = \sqrt{4-2x}$

d) $y = \sqrt{5x-x^2}$

a) Al ser una función polinómica, su dominio es todo \mathbb{R} .

b) Su dominio es todo \mathbb{R} , salvo los puntos que anulan el denominador.

$$(2x-6)^2 = 0 \rightarrow 2x-6 = 0 \rightarrow x = 3$$

Por tanto: $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{3\}$

c) Su dominio son los puntos que hacen que el radicando no sea negativo.

$$4 - 2x \geq 0 \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow x \leq \frac{4}{2} = 2$$

Por tanto: $Dom\ y = (-\infty, 2]$

d) Al igual que en el apartado anterior:

$$5x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(5 - x) \geq 0$$

Esto ocurre si:

- $x \geq 0$ y $5 - x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$ y $x \leq 5 \rightarrow x \in [0, 5]$
- $x \geq 0$ y $5 - x \leq 0 \rightarrow x \leq 0$ y $x \geq 5 \rightarrow$ Esto no es posible.

Por tanto: $Dom\ y = [0, 5]$

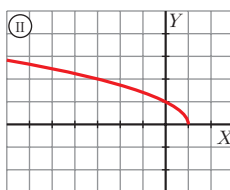
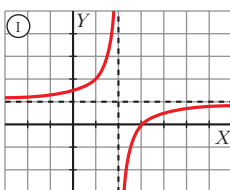
2. Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones:

a) $y = \sqrt{1 - x}$

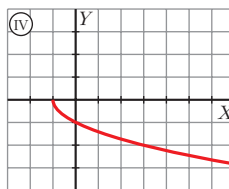
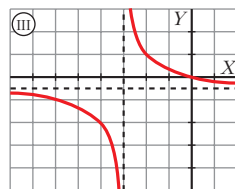
b) $y = \frac{-x}{2x + 6}$

c) $y = -\sqrt{x + 1}$

d) $y = \frac{x - 3}{x - 2}$



- a) II
b) III
c) IV
d) I

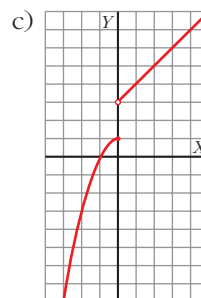
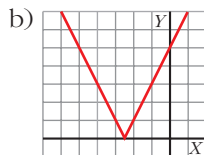
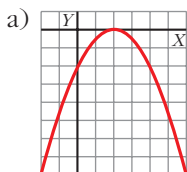


3. Representa las siguientes funciones:

a) $y = -0,5x^2 + 2x - 2$

b) $y = |5 + 2x|$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



4. Asistir a un gimnasio durante 6 meses nos cuesta 246 €. Si asistimos 15 meses, el precio es 570 €.

¿Cuánto tendremos que pagar si queremos ir durante un año?

Vamos a hacer una interpolación lineal. Hallamos la recta que pasa por los puntos (6, 246) y (15, 570).

$$\text{Su pendiente es } m = \frac{570 - 246}{15 - 6} = \frac{324}{9} = 36.$$

Por tanto, la ecuación de la recta es:

$$y = 36(x - 6) + 246 \rightarrow y = 36x + 30$$

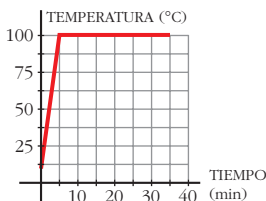
De este modo, si queremos saber cuánto se debe pagar si vamos al gimnasio durante un año (12 meses), hacemos:

$$y(12) = 36 \cdot 12 + 30 = 462$$

Habrà que pagar 462 €.

5. Ponemos al fuego un cazo con agua a 10 °C. En 5 minutos alcanza 100 °C y se mantiene así durante media hora, hasta que el agua se evapora totalmente.

Representa la función que describe este fenómeno y halla su expresión analítica.



- La gráfica pasa por los puntos (0, 10) y (5, 100).

- Hallamos la ecuación de esta recta:

$$\text{Pendiente: } \frac{100 - 10}{5 - 0} = 18 \rightarrow y = 18(x - 0) + 10$$

- Para valores de x mayores que 5, la temperatura se mantiene constante $\rightarrow y = 100$.

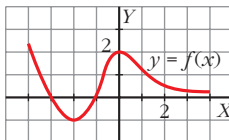
$$\text{Expresión analítica: } f(x) = \begin{cases} 18x + 10 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 100 & \text{si } 5 \leq x \leq 35 \end{cases}$$

6. A partir de la gráfica de $y = f(x)$, representa:

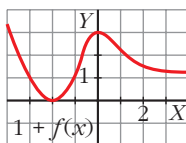
a) $y = 1 + f(x)$

b) $y = f(x - 1)$

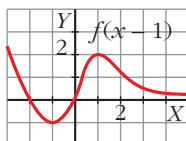
c) $y = -f(x)$



a) La gráfica se desplaza una unidad hacia arriba.



b) La gráfica se desplaza una unidad hacia la derecha.



c) La gráfica es simétrica a la de $f(x)$, respecto al eje X .

